Notizen der Vorlesungsreihe

Lineare Algebra

-Definitionen-

in den Jahren 2014 & 2015

–Prof. Dr. Sander Zwegers–

Stand:
Samstag, 3. Oktober 2015

Version 0.1

Mathematisches Institut
Universität zu Köln

Inhaltsverzeichnis

Lineare Algebra I

1. Lineare Gleichungssysteme

1.1. Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.1 (Zahlenmengen):
Die Menge der ***natürlichen Zahlen*** *nennt man $\mathbb{N}$:*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Weiterhin definiert man $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die Menge der ***ganzen Zahlen*** *nennt man $\mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Die Menge der ***rationalen Zahlen*** *nennt man $\mathbb{Q}$:*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z} \text{ und } m \in \mathbb{N}\right\}$$

Die Menge der ***reellen Zahlen*** *nennt man $\mathbb{R}$.*

Die Menge der ***komplexen Zahlen*** *nennt man $\mathbb{C}$.*

Definition 1.2 (lineares Gleichungssystem):
Unter einem ***linearen Gleichungssystem*** *mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstehen wir ein Gleichungssystem der Form*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots & \ \ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

Hierbei gilt $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ und $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le m$.

1.2. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Definition 1.3 (elementaren Zeilentransformationen):
Die ***elementaren Zeilentransformationen*** *sind:*

1. *Vertauschen von zwei Zeilen*
2. *Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null*
3. *Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile*

Definition 1.4 (Zeilenstufenform):
*Ein Gleichungssystem in **Zeilenstufenform** ist ein Gleichungssystem der folgenden Form:*

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots
\end{array}\right)$$

*Dabei steht $*$ für eine beliebige Zahl, und die freien Plätze sind alle mit Nullen besetzt. Der erste von Null verschiedene Eintrag in jeder Zeile ist 1. Dieser Eintrag wird das **Pivotelement** der Zeile genannt. Das Pivotelement der $(i+1)$-ten Zeile steht immer rechts des Pivotelementes der i-ten Zeile, und alle Einträge oberhalb eines Pivotelementes sind gleich Null.*

1.3. Beispiele

2. Rechnen mit Matrizen

2.1. Matrizen

Definition 2.1 (Matrix):
*Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-Matrix A besteht aus mn Zahlen, die in einem Schema von der Form eines Rechtecks angeordnet werden. Dieses Schema besteht aus m **Zeilen** und n **Spalten**:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

*mit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Wir schreiben oft einfach $(a_{i,j})$ für die Matrix A. Die Zahlen $a_{i,j}$ heißen die **Einträge** der Matrix. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $M_{m,n}(\mathbb{R})$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$.*

Definition 2.2 (Typ der Matrix):
*Das Paar (m, n) (also die Anzahl der Zeilen und Spalten) nennt man den **Typ** der Matrix.*

*Falls $m = n$ gilt, so reden wir von einer **quadratischen Matrix**. Die Menge $M_{n,n}(\mathbb{R})$ aller $n \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit $M_n(\mathbb{R})$.*

*Wir bezeichnen zwei Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$ als **gleich**, wenn sie vom gleichen Typ sind und alle einander entsprechenden Einträge gleich sind: $a_{i,j} = b_{i,j}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Wir schreiben dann $A = B$.*

Definition 2.3 (i-ter Zeilenvektor):
*Die i-te Zeile einer Matrix $A = (a_{i,j})$ wird **i-ter Zeilenvektor** genannt. Wir schreiben dafür*

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

*Eine $1 \times n$-Matrix wird auch **n-dimensionaler Zeilenvektor** genannt:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

*Die j-te Spalte einer Matrix $A = (a_{i,j})$ wird **j-ter Spaltenvektor** genannt, und wir schreiben*

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a_{1,j} & a_{2,j} & \cdots & a_{m,j} \end{pmatrix}^T$$

*Eine $n \times 1$-Matrix wird auch **n-dimensionaler Spaltenvektor** genannt*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$$

2.2. Die Matrizenaddition

Definition 2.4 (Addition):
Zwei Matrizen vom gleichen Typ können wir addieren: Man addiert die einander entsprechenden Einträge an jeder Stelle. Für $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ist also die Matrix $C = (c_{i,j}) := A + B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n$$

Definition 2.5 (Skalarmultiplikation):
Sei $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Matrix $\lambda A = \lambda \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ durch

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})$$

Definition 2.6 (Nullmatrix):
Die $m \times n$-Matrix, deren Einträge alle gleich Null sind, nennt man die ***Nullmatrix*** *und wir schreiben dafür O oder 0.*

2.3. Die Matrizenmultiplikation

Definition 2.7 (Produkt):
Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Das Produkt einer $l \times m$-Matrix $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,l,\, j=1,\ldots,m}$ und einer $m \times n$-Matrix $B = (b_{i,j})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$ ist eine $l \times n$-Matrix $C = (c_{i,j})_{i=1,\ldots,l,\, j=1,\ldots,n}$, deren Einträge berechnet werden, indem die Produktsummenformel, ähnlich dem Skalarprodukt, auf Paare aus einem Zeilenvektor der ersten und einem Spaltenvektor der zweiten Matrix angewandt wird:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d. h. im Allgemeinen gilt $B \cdot A \neq A \cdot B$. Die Matrizenmultiplikation ist allerdings assoziativ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Definition 2.8 (Einheitsmatrix):
Wir definieren die ***$n \times n$-Einheitsmatrix*** *$I_n = (e_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ durch*

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 2.9 (Potenz einer Matrix):
Sie A eine quadratische Matrix und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren A^k (sprich: ***k-te Potenz*** *von A) induktiv durch*

$$A^0 = I, \quad A^k = A \cdot A^{k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

2.4. Invertierbare Matrizen

Definition 2.10 (invertierbare Matrix):
*Eine Matrix A nennen wir **invertierbar**, wenn es eine Matrix B gibt, so dass*

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

*gilt. Diese Matrix B nennen wir dann die **Inverse** der Matrix A und schreiben $B = A^{-1}$.*

Bemerkung 2.1:
Invertierbare Matrizen sind notwendigerweise quadratisch.

2.5. Gleichungssysteme und invertierbare Matrizen

Definition 2.11 (homogenes & inhomogenes Gleichungssystem):
*Wenn $b = 0$ gilt, dann nennen wir das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ **homogen**. Ist $b \neq 0$, so nennen wir es **inhomogen**.*

2.6. Berechnen von inversen Matrizen

Definition 2.12 (Elementarmatrizen):
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq l \leq n$, mit $k \neq l$.

1. *Die Matrix $\sigma^{k,l} \in M_n(\mathbb{R})$ sei gegeben durch*

$$\sigma^{k,l} :=)($$

2. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ungleich Null. Wir definieren $D^k(\lambda) \in M_n(\mathbb{R})$ durch*

$$D^k(\lambda) := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \Theta \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \Theta & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ k\text{-te Spalte} \end{array}$$

3. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist $Z^{k,l}(\lambda) := I + \lambda E^{k,l} \in M_n(\mathbb{R})$, wobei*

2.7. Die Transponierte einer Matrix

Definition 2.13 (transponierte Matrix):
Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Mit $A^{\mathsf{T}} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Matrix, die als Zeilenvektoren genau die Spaltenvektoren von A hat, d. h.

$$(A^{\mathsf{T}})_{i,j} = A_{j,i} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq m$$

Die Matrix A^{T} nennen wir die ***Transponierte*** *der Matrix A.*

3. Die Determinante

3.1. Die Determinante einer Matrix

Definition 3.1 (Untermatrix):
*Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wir definieren die **Untermatrix** $\tilde{A}_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ als die Matrix, die aus A durch weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.*

3.2. Berechnen von Determinanten

Definition 3.2 (Hauptdiagonalelemente):
*Sei $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Die Einträge $a_{i,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ heißen die **Hauptdiagonalelemente** von A. Weiterhin heißt die Matrix A eine **obere Dreiecksmatrix**, wenn alle Einträge von A unterhalb der Hauptdiagonale Null sind, d. h. $a_{i,j} = 0$ für $i > j$.*

3.3. Die Cramersche Regel und die Leibniz-Formel

Definition 3.3 (adjunkte Matrix):
*Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wir definieren die **adjunkte** Matrix $\operatorname{adj}(A) \in M_n(\mathbb{R})$ von A durch*

$$(\operatorname{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{j,i})$$

Definition 3.4 (Permutation):
*Eine **Permutation** der Zahlen von 1 bis n ist eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Die **Menge aller Permutationen** bezeichnen wir mit S_n.*

Definition 3.5 (Einheitsvektor):
Wir definieren die Spaltenvektoren $e_1,\ldots,e_n \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ durch

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.6 (Signum):
*Sei $\sigma \in S_n$. Wir definieren das **Vorzeichen** $\operatorname{sign}(\sigma)$ von σ (auch **Signum** genannt) durch*

$$\operatorname{sign}(\sigma) := \det(e_{\sigma(1)} \ \cdots \ e_{\sigma(n)})$$

Definition 3.7 (gerade und ungerade Permutation):
*Wir nennen die Permutation $\sigma \in S_n$ **gerade**, wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, und **ungerade**, wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.*

4. Vektorräume

4.1. Gruppen, Ringe und Körper

Eine **Verknüpfung** „$\circ$“ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} M \times M &\to M \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 \circ m_2 \end{aligned}$$

Man nennt die Verknüpfung „$\circ$“ **assoziativ**, falls

$$(m_1 \circ m_2) \circ m_3 = m_1 \circ (m_2 \circ m_3)$$

Ein Element $e \in M$ heißt **neutrales Element**, falls

$$\forall m \in M \colon e \circ m = m \text{ und } m \circ e = m$$

Sei M eine Menge mit assoziativer Verknüpfung und einem neutralen Element e. Sei $m \in M$, dann heißt m **invertierbar**, falls gilt:

$$\exists n \in M \colon m \circ n = e \text{ und } n \circ m = e$$

Bemerkung 4.1:
Wenn ein neutrales Element existiert, ist es eindeutig denn für e, e' neutrale Elemente gilt:

$$e \overset{e' \text{ neutral}}{=} e \circ e' \overset{e \text{ neutral}}{=} e'$$

Wenn m invertierbar ist, dann ist n eindeutig. Angenommen n, n' sind inverse zu m.

$$n = n \circ e = n \circ (m \circ n') = (n \circ m) \circ n' = e \circ n' = n'$$

Da inverse eindeutig sind, benutzen wir die Notation m^{-1}.

Definition 4.1 (Gruppe):
*Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ ist eine <u>nichtleere</u> Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ$,*

1. *die ein neutrales Element besitzt und für die*
2. *alle Elemente invertierbar sind*

Definition 4.2 (Untergruppe):
*Eine **Untergruppe** H einer Gruppe G ist eine <u>nichtleere</u> Teilmenge von G, die selbst eine Gruppe ist, d. h.*

1. $e \in H$
2. $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$
3. $h, h' \in H \Rightarrow h \circ h' = e$

Definition 4.3 (endliche und abelsche Gruppe):
*Eine Gruppe heißt **endlich**, falls sie nur endlich viele Elemente enthält. Man schreibt*

$$|G| = \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente}, & G \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

*Man nennt eine Gruppe **kommutativ** oder **abelsch**, falls*

$$\forall g, g' \in G\colon g \circ g' = g' \circ g$$

Definition 4.4 (Ring):
*Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine <u>nichtleere</u> Menge mit zwei Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} +\colon R \times R &\to R \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot\colon R \times R &\to R \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

„$+$" und „$\cdot$", so dass

1. *$(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist*
2. *$(R, \cdot)$ assoziativ ist und ein Eins-Element hat*
3. *Die Distributivgesetze gelten*

Definition 4.5 (kommutativer Ring):
*Ein Ring R heißt **kommutativer Ring**, falls $ab = ba$ gilt für alle $a, b \in R$.*

Definition 4.6 (Einheit):
*Sei R ein Ring. Sei $a \in R$. Falls es ein $b \in R$ gibt, so dass $ab = ba = 1$ gilt, dann heißt a eine **Einheit**. Wir schreiben dann $b = a^{-1}$. Die **Menge aller Einheiten** des Rings R bezeichnen wir mit R^*.*

Definition 4.7 (Schiefkörper und Körper):
*Wenn $R^* = R \setminus \{0\}$ ist, dann heißt R **Schiefkörper**. Ein kommutativer Schiefkörper heißt **Körper**.*

Definition 4.8 (Charakteristik):
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass die n-fache Summe des Einselementes 1 gleich dem Nullelement 0 ist, d. h.

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} = 0$$

*nennen wir die **Charakteristik** von $\mathbb{K}$, und wir schreiben $\operatorname{char}(\mathbb{K})$ für n. Falls es keine solche Zahl n gibt, so definieren wir $\operatorname{char}(\mathbb{K}) := 0$.*

Bemerkung 4.2:
Da wir annehmen, dass die Elemente 0 und 1 nicht gleich sind, gilt $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 1$.

4.2. Vektorräume

Definition 4.9 (Vektorraum):
$(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ heißt ein ***Vektorraum*** *über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, wenn folgendes gilt. Die Addition und die Multiplikation mit Skalaren sind wohldefiniert:*

$$t \in \mathbb{K} \text{ und } x, y \in V \Rightarrow x + y \in V \text{ und } t \cdot x \in V$$

und haben die folgenden Eigenschaften:

- *$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe:*
  1. ***Assoziativität***: *$\forall x, y, z \in V$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$*
  2. ***Neutrales Element***: *es gibt ein $0 \in V$ derart, dass $\forall x \in V$ gilt $x + 0 = x$*
  3. ***Inverses Element***: *für jedes $x \in V$ gibt es $-x \in V$ derart, dass $x + (-x) = 0$*
  4. ***Kommutativität***: *für alle $x, y \in V$ gilt $x + y = y + x$*
- *Für die Multiplikation mit Skalaren gilt außerdem:*
  5. ***Assoziativität***: *für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt $t_1 \cdot (t_2 \cdot x) = (t_1 t_2) \cdot x$*
  6. ***Unitäres Element***: *für alle $x \in V$ gilt $1 \cdot x = x$*
  7. ***Distributivität***: *für alle $t \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$ gilt $t \cdot (x + y) = (t \cdot x) + (t \cdot y)$*

Definition 4.10 (Untervektorraum):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subset V$ eine nichtleere Teilmenge, so dass gilt:

1. *Es ist $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$ (U ist abgeschlossen unter Addition)*
2. *Es ist $\lambda v \in U$ für alle $v \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ (U ist abgeschlossen unter Skalarmultiplikation)*

Dann heißt U ***Unterraum*** *oder* ***Untervektorraum*** *des Vektorraums V.*

4.3. Lineare (Un)abhängigkeit und Basen

Definition 4.11 (Linearkombination):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, seien $v_1, \dots, v_r \in V$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Man nennt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in V$ eine ***Linearkombination*** *der Vektoren $v_1, \dots, v_r$. Die Menge*

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_r\} := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \colon \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\} \subset V$$

aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_r$ heißt der ***lineare Spann*** *von $v_1, \dots, v_r$.*

Definition 4.12 (Erzeugendensystem):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein ***Erzeugendensystem*** *von V ist eine endliche Teilmenge $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$, so dass*

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_r\} = V$$

Definition 4.13 (linear unabhängig):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ heißen ***linear unabhängig****, wenn die Gleichung*

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ hat. Falls es auch nichttriviale Lösungen gibt, so nennt man die Vektoren $v_1, \dots, v_r$ ***linear abhängig****.*

Definition 4.14 (Basis):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine ***Basis*** *von V ist eine endliche Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, so dass die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind und $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.*

Definition 4.15 (endlich erzeugter Vektorraum):
Ein Vektorraum heißt ***endlich erzeugt****, wenn er ein (endliches) Erzeugendensystem hat.*

4.4. Der Dimensionsbegriff

Definition 4.16 (Dimension):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Die ***Dimension*** *von V ist die eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und wir schreiben $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ (oder manchmal einfach $\dim(V)$) für n. Wenn es keine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass V eine Basis $\{v_1 \dots, v_n\}$ besitzt, dann nennen wir V einen unendlich dimensionalen Vektorraum und schreiben $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \infty$.*

4.5. Der Basiswechsel

Definition 4.17 (Basistransformationsmatrix):
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1. *Sei $\mathbb{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine geordnete Basis von V und sei $v \in V$. Seien weiterhin $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so dass*

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Wir definieren den Vektor $v_{\mathbb{A}} \in \mathbb{K}^n$ durch $v_{\mathbb{A}} := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$.

2. *Seien $\mathbb{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathbb{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ zwei geordnete Basen von V. Die* ***Basistransformationsmatrix*** *$T_{\mathbb{B}}^{\mathbb{A}}$ von $\mathbb{A}$ in $\mathbb{B}$ ist die Matrix*

$$T_{\mathbb{B}}^{\mathbb{A}} = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$$

deren Spaltenvektoren genau die Koeffizienten der Darstellung der $v_i \in \mathbb{A}$ als Linearkombination der $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{B}$ beschreiben:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} w_j$$

4.6. Affine Unterräume

Definition 4.18 (affiner Unterraum):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $W \subset V$ eine Teilmenge, so dass es ein $v \in V$ und einen Unterraum $U \subset V$ gibt, mit

$$W = v + U := \{v + u \colon u \in U\}$$

Dann heißt W ein ***affiner Unterraum*** von V.

4.7. Summen von Unterräumen

Definition 4.19 (Summe von Unterräumen):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien U_1, U_2 Unterräume von V. Wir definieren die ***Summe*** *$U_1 + U_2$ von U_1 und U_2 durch*

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \colon u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$$

Die Summe wird oft mit ***Minkowski-Summe*** *bezeichnet.*

Definition 4.20 (direkte Summe):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien U_1, U_2 Unterräume von V. Die Summe $U := U_1 + U_2$ heißt ***direkte Summe*** von U_1 und U_2, falls eine der äquivalenten Bedingungen

1. Ist $u_1 + u_2 = 0$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, so folgt $u_1 = u_2 = 0$
2. Für alle $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ eindeutig
3. Es gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

erfüllt ist. Wir schreiben dann $U = U_1 \oplus U_2$.

5. Lineare Abbildungen

5.1. Lineare Abbildungen und Isomorphie

Definition 5.1 (Homomorphismus):
Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W, so dass gilt:

1. $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ *für alle* $v, w \in V$
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *und alle* $v \in V$

Dann heißt φ eine ***lineare Abbildung*** *(oder ein* ***Homomorphismus****).*

Bemerkung 5.1:
Mit $\lambda = 0 \in \mathbb{K}$ folgt $\varphi(0) = 0$.

Definition 5.2 (Morphismen):
Mit $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ (oder einfach $\operatorname{Hom}(V, W)$) bezeichnen wir die ***Menge aller Homomorphismen*** *von V nach W. Weiterhin heißt $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$*

1. ***Monomorphismus****, wenn φ injektiv ist*
2. ***Epimorphismus****, wenn φ surjektiv ist*
3. ***Isomorphismus****, wenn φ bijektiv ist*
4. ***Endomorphismus****, wenn $V = W$ gilt*
5. ***Automorphismus****, wenn $V = W$ gilt und φ bijektiv ist*

Definition 5.3 (isomorph):
Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W, so heißen die Vektorräume (zueinander) ***isomorph****.*
Notation: $V \simeq W$.

Definition 5.4 (Bild und Kern):

5.2. Der Rangsatz

Definition 5.5 (Rang):

5.3. Der Rang einer Matrix

Definition 5.6 (Zeilenraum):

5.4. Die Matrix eines Homomorphismus

Definition 5.7 (Koordinatenabbildung):

Definition 5.8:

Definition 5.9 (Polynom):

5.5. Homomorphismen und Basiswechsel

Definition 5.10 (Endomorphismen):

Definition 5.11 (Determinante):

6. Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit

6.1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 6.1 (Eigenwert & Eigenvektor):

1. *Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Unter einem* ***Eigenvektor*** *von A zum* ***Eigenwert*** *$\lambda \in \mathbb{K}$ versteht man einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft*

$$Av = \lambda v$$

2. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit*

$$\varphi(v) = \lambda v$$

Definition 6.2 (Eigenraum):

1. *Der Unterraum $E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \colon Av = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A-\lambda I})$ heißt der* ***Eigenraum von A*** *zum Eigenwert λ.*
2. *$E_\lambda = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ heißt der* ***Eigenraum von φ*** *zum Eigenwert λ.*

6.2. Das charakteristische Polynom

Definition 6.3 (charakteristische Polynom):
Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ definieren wir

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) \qquad \text{und} \qquad \chi_\varphi(\lambda) := \det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$$

Man nennt χ_A bzw. χ_φ das ***charakteristisches Polynom*** *von A bzw. φ.*

Definition 6.4 (algebraische und geometrische Vielfachheit):

1. ***algebraische Vielfachheit:***
   $\sigma(\lambda)$ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$
2. ***geometrische Vielfachheit:***
   $\rho(\lambda)$ ist die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ

Manchmal sagt man ***Ordnung*** *statt algebraischer Vielfachheit und* ***Vielfachheit*** *statt geometrischer Vielfachheit.*

Die geometrische Vielfachheit $\rho(\lambda)$ ist die Dimension des Kerns von $A - \lambda I$, also die Dimension des **Eigenraums** von A zu λ.

Ist λ Eigenwert von A, so ist $1 \leq \rho(\lambda) \leq \sigma(\lambda) \leq n$. Im Fall $\rho(\lambda) < \sigma(\lambda)$ existieren zu λ Hauptvektoren höherer Stufe.

Definition 6.5 (Spur):
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir bezeichnen als die ***Spur*** *von A die Summe der Hauptdiagonalelemente von A, also*

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$$

Statt $\mathrm{Spur}(A)$ ist auch die Schreibweise $\mathrm{sp}(A)$ gebräuchlich. Wir werden die vom englischen Begriff „trace“ abgeleitete Schreibweise $\mathrm{tr}(A)$ verwenden.

6.3. Der Satz von Cayley-Hamilton

Definition 6.6 (Matrixpolynom):
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und sei $f(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m \in \mathbb{K}[x]$. Wir definieren das ***Matrixpolynom*** *$f(A) \in M_n(\mathbb{K})$ durch*

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

6.4. Diagonalisierbare Matrizen

Definition 6.7 (diagonalisierbare & ähnliche Matrizen):

1. *Zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ heißen* ***ähnlich*** *(oder* ***konjugiert****), wenn es eine invertierbare Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gibt mit $B = g^{-1}Ag$.*
2. *Eine* ***Diagonalmatrix*** *ist eine quadratische Matrix, bei der alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen Null sind. Wenn $D \in M_n(\mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix mit Hauptdiagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n$ ist, so schreiben wir*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \ominus \\ & \ddots & \\ \ominus & & d_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

3. *Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt* ***diagonalisierbar****, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, also wenn es eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ gibt mit*

$$g^{-1}Ag = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

6.5. Diagonalisierbare Matrizen über $\mathbb{C}$

Definition 6.8 (Nullstelle):
*Sei $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$ und sei $t \in \mathbb{K}$. Dann heißt t **Nullstelle** des Polynoms f, falls $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n = 0$ gilt.*

6.6. Trigonalisierbare Matrizen

Definition 6.9 (trigonalisierbar):
*Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wenn es eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gibt, so dass $g^{-1}Ag$ eine obere Dreiecksmatrix ist, dann heißt A **trigonalisierbar**.*

Bemerkung 6.1:
Jede diagonalisierbare Matrix ist auch trigonalisierbar.

6.7. Nilpotente Matrizen

Definition 6.10 (nilpotente Matrix):
*Eine quadratische Matrix $N \in M_n(\mathbb{K})$ heißt **nilpotent**, falls es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $N^k = 0$. Die kleinste natürliche Zahl k mit dieser Eigenschaft heißt der **Nilpotenzindex** von N.*

6.8. Lineare Rekursionsgleichungen

Definition 6.11 (Rekursionsgleichung r-ter Ordnung):
Eine Gleichung der Form

$$a_n = b_1a_{n-1} + b_2a_{n-2} + \cdots + b_ra_{n-r} \qquad (n \geq r)$$

*mit $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{C}$ und $b_r \neq 0$, heißt eine **Rekursionsgleichung r-ter Ordnung**. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die für alle $n \geq r$ diese Gleichung erfüllt, heißt **Lösung der Rekursionsgleichung**.*

Lineare Algebra II

7. Euklidische und unitäre Vektorräume

7.1. Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Definition 7.1 (kanonisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$):
Für $V = \mathbb{R}^n$ wird $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$, konkret für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} := x^T y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

*Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **kanonisches Skalarprodukt im** $\mathbb{R}^n$.*

Definition 7.2 (euklidische Norm und Abstand):
Wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt ist, dann ist $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

*eine Norm. Diese Norm nennt man die vom Skalarprodukt **induzierte Norm**.*
Wir definieren für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

*$d(x, y)$ nennt man den **Abstand** zwischen x und y.*

Definition 7.3 (Winkel):
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und sei $\vartheta \in [0, \pi]$, so dass

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cdot \cos(\vartheta)$$

*Dann nennen wir ϑ den **Winkel** zwischen den Vektoren x und y.*

Definition 7.4 (senkrecht):
*Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen **senkrecht (zueinander)**, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt.*

7.2. Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Definition 7.5 (Vektorprodukt):
Für $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ *und* $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ *definieren wir*

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Die Abbildung $\cdot \times \cdot \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *heißt* ***Vektor-*** *oder* ***Kreuzprodukt*** *im* $\mathbb{R}^3$.

7.3. Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

Definition 7.6 (kanonisches Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$):
Für $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ *und* $w = (w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{C}^n$ *definieren wir*

$$\langle z, w \rangle = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} := z^T \overline{w} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$$

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *heißt* ***kanonisches Skalarprodukt im*** $\mathbb{C}^n$.

Definition 7.7 (Norm):
Wir definieren eine ***Norm*** *auf* $\mathbb{C}^n$ *durch:*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon \mathbb{C}^n &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ z &\mapsto \|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} \end{aligned}$$

7.4. Bilinearformen

Definition 7.8 (Bilinearform):
Sei V *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$. *Eine* ***Bilinearform*** *ist eine Abbildung* $s \colon V \times V \to \mathbb{K}$, *so dass für alle* $x, y, z \in V$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt, dass* s ***bilinear*** *ist:*

- $s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z)$
- $s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y)$
- $s(x, y + z) = s(x, y) + s(x, z)$
- $s(x, \lambda y) = \lambda s(x, y)$

Weiter heißt s ***symmetrisch***, *falls* $s(x, y) = s(y, x)$ *gilt.*
Oder ***schiefsymmetrisch***, *falls* $s(x, y) = -s(y, x)$ *gilt.*

Definition 7.9 (symmetrische und schiefsymmetrische Matrix):
Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *mit* $A^T = A$ *bzw.* $A^T = -A$. *Dann heißt* A ***symmetrisch*** *bzw.* ***schiefsymmetrisch***.

Definition 7.10 (darstellende Matrix):
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathbb{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und sei s eine Bilinearform auf V. Die Matrix $M_{\mathbb{A}}(s) \in M_n(\mathbb{K})$ mit Einträgen

$$(M_{\mathbb{A}}(s))_{i,j} = s(v_i, v_j)$$

heißt die ***darstellende Matrix*** *von s bezüglich $\mathbb{A}$.*

Definition 7.11 (euklidischer Vektorraum):

1. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei s eine symmetrische Bilinearform auf V. Falls $s(v, v) > 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$, so heißt s* ***positiv definit****.*
2. *Eine positiv definite symmetrische Bilinearform nennt man ein* ***Skalarprodukt****.*
3. *Einen reellen Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt nennt man einen* ***euklidischen Vektorraum****.*

7.5. Orthogonalität

Definition 7.12 (orthogonal und orthogonales Komplement):
Sei V ein euklidischer Vektorraum.

1. *Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen* ***orthogonal (senkrecht)****, wenn $s(u, v) = 0$*
2. *Zwei Unterräume U und W von V heißen* ***orthogonal****, wenn*
$$s(u, w) = 0 \quad \text{für alle } u \in U, w \in W$$
3. *Sei $U \subset V$.*
$$U^{\perp} := \{v \in V \colon s(v, u) = 0,\ \forall u \in U\}$$
heißt das ***orthogonale Komplement*** *von U.*

Notation: *Wir schreiben auch $u \perp v$ und $U \perp W$, wenn u und v bzw. U und W orthogonal sind.*

Definition 7.13 (Orthonormalbasis):
Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine geordnete Basis $\mathbb{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V heißt ***Orthonormalbasis (bezüglich s)****, falls $M_{\mathbb{A}}(s) = I_n$, d. h.*

$$s(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

7.6. Sesquilinearformen

Definition 7.14 (Sesquilinearform):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine ***Sesquilinearform*** *(sesqui bedeutet $1\frac{1}{2}$-fach) ist eine Abbildung*

$$s\colon V \times V \to \mathbb{C}$$

so dass für alle $v, \tilde{v}, w, \tilde{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} s(v+\tilde{v}, w) &= s(v,w) + s(\tilde{v}, w), \qquad & s(\lambda v, w) &= \lambda s(v,w) \\ s(v, w+\tilde{w}) &= s(v,w) + s(v, \tilde{w}), \qquad & s(v, \lambda w) &= \overline{\lambda} s(v,w) \end{aligned}$$

Weiter heißt s ***hermitesch****, falls $s(w,v) = \overline{s(v,w)}$ für alle $v, w \in V$.*

Definition 7.15 (hermitesche Matrix):
Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ nennen wir ***hermitesch****, falls $A^T = \overline{A}$ gilt.*

Definition 7.16 (positiv definite Sesquilinearform):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine hermitesche Form (d. h. eine hermitesche Sesquilinearform) s heißt ***positiv definit****, falls*

$$s(v,v) \geq 0 \text{ für alle } v \in V \quad \text{und} \quad s(v,v) = 0 \iff v = 0$$

Achtung: *$s(v,v) \in \mathbb{R}$ folgt aus $s(v,v) = \overline{s(v,v)}$.*

Definition 7.17 (unitärer Vektorraum):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine positiv definite hermitesche Form auf V, nennt man ein ***Skalarprodukt****. Einen komplexen Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt nennt man einen* ***unitären Vektorraum****.*

7.7. Darstellende Matrizen und Basiswechsel

7.8. Quadratische Formen

Definition 7.18 (quadratische Form):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sei s eine symmetrische Bilinearform auf V. Die Abbildung

$$q\colon V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \frac{1}{2} s(v,v)$$

heißt die zu s gehörige ***quadratische Form****.*

7.9. Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Definition 7.19 (Norm):
Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt s. Für $v \in V$ definieren wir

$$\|v\| = \sqrt{s(v,v)}$$

Die Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt ***Norm****.*

Definition 7.20 (Abstand):
Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Wir definieren für $v, w \in V$

$$d(v,w) = \|w - v\|$$

$d(v,w)$ nennt man den ***Abstand*** *zwischen v und w.*

7.10. Ungleichung von Hadamard

Definition 7.21 (Gramsche Determinante):
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Sei $m \leq \dim V$. Wir definieren $G\colon V^m \to \mathbb{R}$ durch

$$G(v_1, \ldots, v_m) := \det \begin{pmatrix} s(v_1,v_1) & \cdots & s(v_1,v_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(v_m,v_1) & \cdots & s(v_m,v_m) \end{pmatrix}$$

$G(v_1, \ldots, v_m)$ heißt die ***Gramsche Determinante*** *von $v_1, \ldots, v_m$.*

Definition 7.22 (Volumen):
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Sei $m \leq \dim V$. Wir definieren

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \ldots, v_m)}$$

7.11. Isometrien

Definition 7.23 (Isometrie):
Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Wenn

$$s\big(\varphi(v), \varphi(w)\big) = s(v,w)$$

für alle $v, w \in V$ gilt, dann heißt φ ein ***orthogonaler*** *bzw.* ***unitärer Endomorphismus****. Solche Abbildungen nennt man auch* ***Isometrien****.*

Definition 7.24 (orthogonale und unitäre Matrix):
Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar. Dann heißt A ***orthogonal*** *wenn $A^{-1} = A^{T}$.*
Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ invertierbar. Dann heißt A ***unitär*** *wenn $A^{-1} = A^{H}$.*

Definition 7.25 (Spezielle Gruppen):
Wir definieren die ***allgemeine lineare Gruppe*** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *und die* ***spezielle lineare Gruppe*** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *als*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &:= \{A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) &:= \{A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

sowie die Mengen O_n, SO_n, U_n *und* SU_n *durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{\mathsf{T}} A = I\} \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) &:= \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \\ \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{\mathsf{H}} A = I\} \\ \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) &:= \{A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

Wir bezeichnen O_n *als* ***orthogonale Gruppe***, SO_n *als* ***spezielle orthogonale Gruppe***, U_n *als* ***unitäre Gruppe*** und SU_n *als* ***spezielle unitäre Gruppe***.

Bemerkung 7.1 (unimodulare Matrizen):
Eine Matrix A mit $\det A = 1$, also $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, heißt **unimodular**.
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt **vollständig-unimodular**, falls jeder der Minoren, d. h. die Determinante einer quadratischen Teilmatrix, von A gleich -1, 0 oder $+1$ ist.
Hier gilt insbesondere: $A_{i,j} \in \{-1, 0, +1\}$.

Definition 7.26 (Drehungsmatrix):
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ *definieren wir die* ***Drehungsmatrix***

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2$$

7.12. Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 7.27 (selbstadjungierter Endomorphismus):
Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. *Wenn*

$$s\big(\varphi(v), w\big) = s\big(v, \varphi(w)\big)$$

gilt für alle $v, w \in V$, *dann heißt* φ ***selbstadjungiert***.

7.13. Die Hauptachsentransformation

Definition 7.28 (positiv definite Matrix):
Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *symmetrisch und sei* s *die durch* A *gegeben symmetrische Bilinearform auf* $\mathbb{R}^n$. *Dann heißt die Matrix* A ***positiv definit***, *falls* s *positiv definit ist.*

7.14. Der Orthogonalisierungssatz

7.15. Orthogonale Projektion und Spiegelungen

Definition 7.29 (Projektion):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $P \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißt P eine ***Projektion****, falls $P \circ P = P$ gilt. Wir sagen auch, dass P dann* ***idempotent*** *ist.*
Wenn P idempotent ist, dann ist für alle $k \geq 2$

$$P^k := \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{k \text{ mal}} = P$$

Definition 7.30 (orthogonale Projektion):
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und sei U ein Unterraum von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Projektion $P \in \mathrm{End}(V)$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$P(v) \in U \quad \text{und} \quad \big(v - P(v)\big) \in U^\perp$$

Diese Projektion nennen wir die ***orthogonale Projektion auf U*** *und wir schreiben P_U für P.*

Definition 7.31 (Spiegelung):
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und sei U ein Unterraum von V. Sei $S_U \in \mathrm{End}(V)$ gegeben durch

$$S_U(v) = P_U(v) - \big(v - P_U(v)\big)$$

Dann heißt S_U die ***Spiegelung in U****.*

8. Die Jordansche Normalform

8.1. Die Jordansche Normalform

Definition 8.1 (Jordan-Normalform):
Eine Matrix $J \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ ist in ***Jordan-Normalform*** *oder eine* ***Jordan-Matrix****, wenn sie wie folgt aus* ***Jordan-Blöcken*** *zusammengesetzt ist:*

$$J = \begin{pmatrix} c_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n_r}(\lambda_n) \end{pmatrix} \text{ mit } c_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

wobei $r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ mit $n_1 + \cdots + n_r = n$.

8.2. Hauptraumzerlegung

Bemerkung 8.1:
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und sei $\varphi_A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ gegeben durch $\varphi_A(v) = Av$. Wir setzen

$$\operatorname{Ker} A := \operatorname{Ker} \varphi_A \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im} A := \operatorname{Im} \varphi_A$$

Definition 8.2 (Hauptraum):
Für einen Eigenwert λ von A mit algebraischen Vielfachheit $r \geq 1$ definieren wir

$$\mathrm{Hau}_\lambda = \ker(A - \lambda I)^r$$

Man nennt Hau_λ den ***Hauptraum*** *(****verallgemeinerten Eigenraum****) von A zum Eigenwert λ. Ein Vektor $v \in \mathrm{Hau}_\lambda$ mit $v \neq 0$, heißt* ***verallgemeinerter Eigenvektor*** *von A zum Eigenwert λ.*

8.3. Nilpotente Endomorphismen und Matrizen

Definition 8.3 (nilpotenter Endomorphismus):
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt ***nilpotent*** *auf V, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\varphi^k(v) = 0$ für alle $v \in V$. Die kleinste natürliche Zahl k mit dieser Eigenschaft heißt der* ***Nilpotenzindex*** *von φ (auf V).*

8.4. Beweis des Satzes über die Jordansche Normalform

8.5. Das Verfahren im nilpotenten Fall

Definition 8.4 (Komplement):
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei U ein Unterraum von V. Ein Unterraum U' von V heißt ein ***Komplement zu U in V****, falls $U \oplus U' = V$ erfüllt ist.*

Definition 8.5 (Jordanbasis & Jordankette):
Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent auf V und sei

$$\mathbb{B} = \{\varphi^{m_1-j}(v_1)\}_{1\leq j\leq m_1} \cup \cdots \cup \{\varphi^{m_r-j}(v_r)\}_{1\leq j\leq m_r}$$

eine Basis von V mit $M(\varphi)_{\mathbb{B}}$ in Jordan-Normalform. Wir nennen $\mathbb{B}$ dann eine ***Jordanbasis*** *und die m_k Vektoren $\varphi^{m_k-1}(v_k), \varphi^{m_k-2}(v_k), \ldots, v_k$ bilden eine* ***Jordankette****. Komplett analog ist $N^{m_k-1}v_k, N^{m_k-2}v_k, \ldots, v_k$ eine Jordankette der Länge m_k für die nilpotente Matrix N.*

Rezeptur

Sei $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotent. Wir berechnen $N, N^2, \ldots$ bis wir O erhalten. Damit kennen wir den Nilpotenzindex p von N. Auch berechnen wir $\mathrm{Ker}(N^k)$ für $1 \leq k \leq p$. Somit kennen wir die d_k und damit auch die a_k, d. h. wir haben die jordansche Normalform J von N schon bestimmt. Nun basteln wir eine Jordanbasis:

1. Wir bestimmen a_p linear unabhängige Vektoren $v_1^{(p)}, \ldots, v_{a_p}^{(p)} \in \mathbb{K}^n$, deren Spann $S^{(p)}$ ein Komplement zu $\mathrm{Ker}(N^{p-1})$ in $\mathrm{Ker}(N^p) = \mathbb{K}^n$ ist (dazu ergänzen wir eine Basis von $\mathrm{Ker}(N^{p-1})$ zu einer Basis vom $\mathbb{K}^n$). Die a_p zugehörigen Jordanketten der Länge p sind dann gegeben durch
$$N^{p-1}v_k^{(p)}, N^{p-2}v_k^{(p)}, \ldots, Nv_k^{(p)}, v_k^{(p)} \qquad (1 \leq k \leq a_p)$$
2. Wir bestimmen a_{p-1} linear unabhängige Vektoren $v_1^{(p-1)}, \ldots, v_{a_{p-1}}^{(p-1)} \in \mathbb{K}^n$, deren Spann $S^{(p-1)}$ ein Komplement zu
$$\mathrm{Ker}(N^{p-2}) + N \cdot S^{(p)} \qquad (\text{mit } N \cdot S^{(p)} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Nv_1^{(p)}, \ldots, Nv_{a_p}^{(p)}\})$$
in $\mathrm{Ker}(N^{p-1})$ ist (es ist $N \cdot S^{(p)} \subset \mathrm{Ker}(N^{p-1})$, aber diese Vektoren brauchen wir nicht mehr zu bestimmen). Die zugehörigen Jordanketten der Länge $p-1$ sind dann gegeben durch
$$N^{p-2}v_k^{(p-1)}, N^{p-3}v_k^{(p-1)}, \ldots, Nv_k^{(p-1)}, v_k^{(p-1)} \qquad (1 \leq k \leq a_{p-1})$$

3. Wir bestimmen a_{p-2} linear unabhängige Vektoren $v_1^{(p-2)}, \dots, v_{a_{p-2}}^{(p-2)} \in \mathbb{K}^n$, deren Spann $S^{(p-2)}$ ein Komplement zu

$$\operatorname{Ker}(N^{p-3}) + N^2 \cdot S^{(p)} + N \cdot S^{(p-1)}$$

in $\operatorname{Ker}(N^{p-2})$ ist (es ist $(N^2 \cdot S^{(p)} + N \cdot S^{(p-1)}) \subset \operatorname{Ker}(N^{p-2})$, aber diese Vektoren brauchen wir nicht mehr zu bestimmen). Die zugehörigen Jordanketten der Länge $p-2$ sind dann gegeben durch

$$N^{p-3}v_k^{(p-2)}, N^{p-4}v_k^{(p-2)}, \dots, Nv_k^{(p-2)}, v_k^{(p-2)} \qquad (1 \leq k \leq a_{p-2})$$

So gehen wir weiter (wobei wir im ℓ-ten Schritt ein Komplement $S^{(p-\ell+1)}$ zu

$$\operatorname{Ker}(N^{p-\ell}) + N^{\ell-1} \cdot S^{(p)} + N^{\ell-2} \cdot S^{(p-1)} + \dots + N \cdot S^{(p-l+2)}$$

in $\operatorname{Ker}(N^{p-\ell+1})$ bestimmen), bis wir alle Jordanketten gefunden haben. Die Ketten zusammen bilden dann eine Jordanbasis $\mathbb{B}$: Die Matrix $J := M(\varphi_N)_{\mathbb{B}}$ ist in Jordan-Normalform. Weiterhin gilt für die Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, deren Spaltenvektoren die Vektoren aus der Jordanbasis (in der richtigen Reihenfolge) sind: $g^{-1}Ng = J$.

8.6. Das allgemeine Verfahren

Rezeptur

Um eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ in Jordan-Normalform zu bringen, gehen wir folgendermaßen vor:
Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom χ_A von A. Wenn χ_A nicht in Linearfaktoren zerfällt (über $\mathbb{K}$), dann können wir sofort aufhören (die Matrix können wir dann nicht in Jordan-Normalform bringen). Sonst berechnen wir alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit den zugehörigen algebraischen Vielfachheiten $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$. Für alle $1 \leq k \leq r$ bestimmen wir auch

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I), \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^2, \dots$$

bis $\dim_{\mathbb{K}}\Big(\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{p_k}\Big) = m_k$ gilt (dies gilt jedenfalls für $p_k = m_k$, aber es könnte sein, dass wir die maximale Dimension auch schon früher erreichen). Wir basteln nun eine Basis $\mathbb{B}_k$ von $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{p_k} = \mathrm{Hau}_{\lambda_k}$ mit dem Verfahren der Rezeptur für den nilpotenten Fall (mit $A - \lambda_k I$ anstatt N und p_k anstatt p):
Zuerst bestimmen wir ein Komplement $S_{\lambda_k}^{(p_k)}$ zu $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{p_k - 1}$ in $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{p_k}$, dann ein Komplement $S_{\lambda_k}^{(p_k-1)}$ zu $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{p_k-2} + (A - \lambda_k I) \cdot S_{\lambda_k}^{(p_k)}$ in $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{p_k-1}$, usw.
Somit haben wir für alle Haupträume Hau_{λ_k} eine Basis $\mathbb{B}_k$ gefunden. Fügen wir nun die gefundenen Basen zusammen, so erhalten wir eine Basis $\mathbb{B}$ vom $\mathbb{K}^n$ mit $J := M(\varphi_A)_{\mathbb{B}}$ in Jordan-Normalform. Für die Matrix g, die als Spaltenvektoren die Vektoren aus $\mathbb{B}$ hat, gilt dann $g^{-1}Ag = J$.

8.7. Das Matrixexponential

Definition 8.6 (Matrixexponential):
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Wir definieren das ***Exponential*** $\exp(A) \in M_n(\mathbb{C})$ *von A durch*

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

9. Dualität

9.1. Dualräume

Definition 9.1 (Linearform):
Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $\ell\colon V \to \mathbb{K}$ (d. h. $\ell \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$) heißt eine ***Linearform*** *auf V.*

Definition 9.2 (Dualraum):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir definieren den ***Dualraum*** *V^* von V als*

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = \{\textit{Linearformen auf } V\}$$

Bemerkung 9.1:
Der Dualraum V^* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum: Seien $\ell, \ell' \in V^*$ und sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind die Abbildungen $\ell + \ell'\colon V \to \mathbb{K}$ und $\lambda\ell\colon V \to \mathbb{K}$, gegeben durch

$$(\ell + \ell')(v) = \ell(v) + \ell'(v) \qquad \text{und} \qquad (\lambda\ell)(v) = \lambda \cdot \ell(v)$$

auch Linearformen auf V. Der Nullvektor in V^* ist die **Nullabbildung**
$\mathrm{O}\colon V \to \mathbb{K},\ \mathrm{O}(v) := 0$ für alle $v \in V$.

Definition 9.3 (duale Basis):
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathbb{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und seien die Linearformen $\ell_i \in V^*(1 \leq i \leq n)$ gegeben durch

$$\ell_i(v) := \Big(p_{\mathbb{B}}(v)\Big)_i$$

wobei $p_{\mathbb{B}}\colon V \to \mathbb{K}^n$ die Koordinatenabbildung (Definition 5.7) ist. Dann gilt

$$\ell_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin ist $\mathbb{B}^* = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ eine geordnete Basis von V^* und es gilt

$$\ell = \ell(v_1)\ell_1 + \cdots + \ell(v_n)\ell_n \quad \forall \ell \in V^*$$

Wir nennen diese Basis $\mathbb{B}^*$ von V^* die zu $\mathbb{B}$ ***duale Basis****.*

9.2. Duale Abbildungen

Definition 9.4 (duale Abbildung):
Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Wir definieren die ***duale Abbildung*** *$\varphi^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$ durch $\varphi^*(\ell) = \ell \circ \varphi(\ell \in W^*)$.*

kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(\ell) = \ell \circ \varphi \in V^*"'] & W \arrow[d, "\ell \in W^*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

9.3. Annullatorräume

Der Annullatorraum ist eine Verallgemeinerung des orthogonalen Komplements für Vektorräume, in denen kein Skalarprodukt zur Verfügung steht.

Definition 9.5 (Annullatorraum):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, V^* der zugehörige Dualraum und U ein Unterraum von V. Dann heißt

$$U^0 := \{\ell \in V^* \mid \ell(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subset V^*$$

der ***Annullator*** *oder* ***Annullatorraum*** *von U.*
Manchmal wird auch das Wort ***Annihilator*** *statt Annullator verwendet.*

9.4. Bidualräume

Definition 9.6 (Bidualraum):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann definieren wir

$$V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K})$$

V^{**} heißt der ***Bidualraum*** *von V.*

Definition 9.7 (kanonische Abbildung):
Wir definieren die ***kanonische Abbildung*** *$i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{**})$ durch*

$$i(v)(\ell) := \ell(v)$$

für $v \in V$ und $\ell \in V^*$.

Definition 9.8:
Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Wir definieren die Abbildung $\varphi^{**} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{**}, W^{**})$ durch $\varphi^{**} := (\varphi^*)^*$.

kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "i_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

9.5. Lineare Gleichungssysteme

Definition 9.9 (duales Problem):
*Sei $L \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum. Das **duale Problem** ist:*

$$\text{Finde eine Matrix } A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \text{ mit } L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}.$$

Verzeichnisse

A. Index

-Symbole-

-A-

-B-

-C-

-D-

-E-

-F-

-G-

-H-

-I-

-J-

B. Definitionen

I. Definitionen 1